

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
Информационных технологий и
математических методов в экономике

After

И.Н. Щепина
18.04.2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.06 Математический анализ

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цель изучения дисциплины: формирование у обучающихся устойчивых знаний и навыков по применению аппарата математического анализа к решению теоретических и практических задач, исследованию прикладных вопросов экономики.

Основными задачами учебной дисциплины являются:

- овладение теоретическими и методическими основами математического моделирования экономических процессов и формирование навыков использования методов математического анализа для решения экономических задач;
- освоение основных методов решения задач дифференциального исчисления функции одной переменной;
- применение дифференциального исчисления к исследованию функций;
- освоение основных методов решения задач определения экстремума функции одной переменных;
- освоение основных методов решения задач интегрального исчисления;
- освоение основных методов решения задач дифференциального исчисления функции нескольких переменных, освоение основных методов решения задач определения экстремума функции нескольких переменных, задач условного экстремума;
- применение методов математического анализа для определения сходимости числовых и степенных рядов;
- освоение основных методов решения дифференциальных уравнений;
- приобретение навыков использования математических методов и основ моделирования экономических процессов

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Математический анализ» входит в базовую часть учебного плана в 1, 2 семестрах и является обязательной дисциплиной. Программа курса строится на предпосылке, что студенты владеют базовыми знаниями по математике на уровне средней школы. Курс создает предпосылки для более глубокого освоения разделов линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимальных решений, эконометрики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	способен применять знания (на промежуточном уровне) экономической теории при решении прикладных задач	ОПК -1.2	применяет аппарат фундаментальной математики при решении теоретических и практических задач экономической теории	Знать: - основы математического анализа, необходимые для решения финансовых и экономических задач. Уметь: - использовать математический язык и математическую символику при построении стандартных и эконометрических моделей; - осуществлять поиск, сбор и анализ информации, необходимый для решения поставленной экономической задачи.

			<ul style="list-style-type: none"> - применять методы математического анализа к решению различных экономических задач. <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками применения математического инструментария для решения экономических задач; - навыками обработки данных, необходимых для решения экономических задач.
	ОПК -1.4	<i>Использует математические методы и модели оптимизации при решении прикладных задач экономической теории</i>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - основные понятия и методы математического анализа, необходимые для решения поставленной задачи; - инструментальные средства математического анализа для обработки экономических данных. - основы математических методов моделирования экономических систем. <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - осуществлять выбор соответствующего математического инструментария, необходимого для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; - анализировать результаты расчетов, обосновывать полученные выводы; - формулировать и доказывать основные теоремы математического анализа; - решать типовые задачи математического анализа; проводить исследование функций, вычислять пределы, находить производные и интегралы; находить экстремум функции нескольких переменных. <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - понятийным аппаратом математического анализа, необходимым для изучения последующих дисциплин математического цикла и для решения экономических задач; - языком математики для работы со специальной литературой; - навыками применения математического инструментария для анализа полученных данных.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 7 / 252
Форма промежуточной аттестации — зачет с оценкой, экзамен.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		1 семестр	2 семестр
Аудиторные занятия	140	72	68
в том числе:	лекции	70	36
	практические	70	36
	лабораторные	-	-
Самостоятельная работа	76	36	40
в том числе: курсовая работа (проект)		-	-
Форма промежуточной аттестации – экзамен 36 ч	36		36
Итого:	252	108	144

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дис- циплины	Содержание раздела дисциплины
Математический анализ (1 семестр)		
1. Лекции		
1.1	Введение. Элементы теории множеств	Предмет математического анализа. Необходимость и особенности применения методов математического анализа в экономике. Понятие множества. Операции над множествами. Иллюстрация операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера. Ограниченные и неограниченные множества, точная верхняя и точная нижняя грани числового множества. Множество вещественных чисел, промежутки и их виды. Абсолютная величина числа. Примеры использования теории множеств для решения прикладных задач.
1.2	Последовательности. Предел последовательности	Понятие последовательности. Способы задания последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Сходящиеся последовательности, их свойства. Монотонные последовательности. Число e . Теорема о вложенных отрезках. Вычисление предела последовательности.
1.3	Функции. Предел функции	Определение функции. Способы задания функции. Понятия сложной и обратной функций. Неявная функция. Классификация функций. Применение функций в экономике (производственная функция, функция полезности, функция спроса и предложения). Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Определения предела функции в точке и на бесконечности, определение односторонних пределов. Основные свойства пределов функции. Первый и второй замечательные пределы. Примеры экономических приложений. Вычисление пределов функций и раскрытие неопределенностей.
1.4	Непрерывность функции	Определение непрерывности функции в точке и на промежутке. Непрерывность элементарных функций. Свойства непрерывных функций. Классификация точек разрыва. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Непрерывность сложной и обратной функции.
1.5	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	Понятие производной. Геометрический и экономический смысл производной. Односторонние производные. Использование понятия производной в экономической теории. Понятие дифференцируемости функции. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке. Дифференцируемость и непрерывность функции. Понятия дифференциала. Геометрический

		смысл дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференцирование суммы, разности произведения, частного функции. Дифференцирование элементарных функций. Дифференцирование сложной функции, прием логарифмического дифференцирования. Дифференцирование обратной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.
1.6	Применение дифференциального исчисления к исследованию функций	Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Геометрическая и экономическая интерпретация теорем. Признаки монотонности функции. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Первое и второе достаточные условия экстремума. Примеры решения экономических задач на определение экстремума. Понятие выпуклости функции. Достаточные условия выпуклости. Понятие точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Асимптоты графика функций. Теорема Лопиталя. Общая схема исследования функции. Определение интервалов монотонности, экстремумов, точек перегиба и асимптот графика функции. Построение графиков функций. Применение дифференциального исчисления функции одной переменной при решении экономических задач.
1.7	Неопределенный интеграл	Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его основные свойства. Интегралы от основных элементарных функций. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Основные типы интегралов, берающихся по частям.
2. Практические занятия		
2.1	Элементы теории множеств	Понятие множества. Операции над множествами. Иллюстрация операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера. Ограниченные и неограниченные множества, точная верхняя и точная нижняя грани числового множества. Множество вещественных чисел, промежутки и их виды. Примеры использования теории множеств для решения прикладных задач.
2.2	Последовательности. Предел последовательности	Понятие последовательности. Способы задания последовательностей. Вычисление предела последовательности.
2.3	Функции. Предел функции	Определение функции. Способы задания функции. Вычисление пределов функций и раскрытие неопределенностей. Неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. Первый и второй замечательные пределы.
2.4	Непрерывность функции.	Определение непрерывности функции в точке и на промежутке. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
2.5	Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	Понятие производной. Геометрический и экономический смысл производной. Дифференцирование суммы, разности произведения, частного функции. Дифференцирование элементарных функций. Дифференцирование сложной функции, прием логарифмического дифференцирования. Понятия дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.
2.6	Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.	Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Первое и второе достаточные условия экстремума. Примеры решения экономических задач на определение экстремума. Понятие выпуклости функции. Достаточные условия выпуклости. Понятие точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Асимптоты графика функций.
Математический анализ (2 семестр)		
1. Лекции		

1.1	Неопределенный интеграл	Интегрирование тригонометрических функций. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование рациональных функций. Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование простейших иррациональных и трансцендентных функций.
1.2	Определенный интеграл	Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл, геометрический и экономический смысл. Основные свойства определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и метод замены переменной в определенном интеграле. Приложения определенного интеграла. Приближенные методы интегрирования. Использования понятия определенного интеграла в экономике.
1.3	Несобственные интегралы	Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и несобственные интегралы от неограниченных функций.
1.4	Векторные пространства. Функции многих переменных	Понятие координатного пространства. Понятие метрического, линейного, нормированного, евклидова пространства. Примеры экономических пространств. Замкнутые открытые, компактные множества в метрических пространствах. Точечные множества в n -мерном пространстве. Функции многих переменных. Предел функции многих переменных. Непрерывность функции многих переменных. Основные свойства непрерывных функций. Понятие сложной функции. Непрерывность сложной функции. Частные и полные приращения функции многих переменных. Частные производные и дифференциал первого порядка в функции многих переменных. Дифференцируемость функций. Связь дифференцируемости с существованием частных производных. Дифференцируемость и непрерывность. Понятие производной по направлению и градиента. Дифференцирование сложной и неявной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Использование функций многих переменных в экономической теории. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума (критерий Сильвестра). Условный экстремум функции многих переменных. Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений. Метод множителей Лагранжа. Примеры решения экономических задач.
1.5	Числовые и функциональные ряды	Числовые ряды. Определение числового ряда и его суммы. Ряды с положительными членами. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость. Понятие о функциональных рядах. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Разложение функции в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена). Применение рядов в приближенных вычислениях.
1.6	Дифференциальные уравнения	Экономические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения (однородные, неоднородные, с постоянными коэффициентами). Дифференциальные уравнения второго порядка. Приложения дифференциальных уравнений в экономике.
2. Практические занятия		
2.1	Неопределенный интеграл	Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его основные свойства. Интегралы от основных элементарных функций. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Основные типы интегралов, берущиеся по частям. Интегрирование тригонометрических функций. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование рациональных функций. Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование простейших иррациональных функций.

2.2	Определенный интеграл	Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и метод замены переменной в определенном интеграле. Приложения определенного интеграла.
2.3	Несобственные интегралы	Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и несобственные интегралы от неограниченных функций.
2.4	Функции многих переменных	Функции многих переменных. Частные производные и дифференциал первого порядка в функции многих переменных. Понятие производной по направлению и градиента. Дифференцирование сложной и неявной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Использование функций многих переменных в экономической теории. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума (критерий Сильвестра). Условный экстремум функции многих переменных. Метод множителей Лагранжа.
2.5	Числовые и функциональные ряды	Числовые ряды. Определение числового ряда и его суммы. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Гармонический ряд. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости числового ряда (признак сравнения, признак Даламбера, интегральный признак Коши). Знакопеременные ряды абсолютная и условная сходимость. Понятие о функциональных рядах. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
2.6	Дифференциальные уравнения	Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные и линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. Задача Коши. Линейные дифференциальные уравнения (однородные, неоднородные, с постоянными коэффициентами). Дифференциальные уравнения второго порядка.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)			
		Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Всего
<i>1 семестр</i>					
1.	Введение. Элементы теории множеств	4	4	2	10
2.	Последовательности, предел последовательности	4	2	4	10
3.	Функции. Предел функции	6	10	6	22
4.	Непрерывность функции	4	-	6	10
5.	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	6	10	6	22
6.	Применение дифференциального исчисления к исследованию функций	8	10	6	24
7.	Неопределенный интеграл	4	-	6	10
Зачет с оценкой					
Итого:		36	36	36	108
<i>2 семестр</i>					
1.	Неопределенный интеграл	8	10	8	26
2.	Определенный интеграл	6	4	8	18
3.	Несобственные интегралы	4	4	8	16
4.	Векторные пространства. Функции многих переменных	8	12	6	26
5.	Числовые и функциональные ряды	4	2	5	11
6.	Дифференциальные уравнения	4	2	5	11
Экзамен					36
Итого:		34	34	40	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, контрольные работы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся.

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Это позволит впоследствии вспомнить изученный материал, дополнить содержание при самостоятельной работе с литературой, подготовиться к экзамену. Необходимо задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. Целесообразно дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой.

Практические занятия реализуются в соответствии с рабочим учебным планом при последовательном изучении тем дисциплины. Практические занятия позволяют развивать у обучающихся творческое теоретическое мышление, умение самостоятельно изучать литературу, анализировать практику; учат четко формулировать мысль, вести дискуссию, то есть имеют исключительно важное значение в развитии самостоятельного мышления.

В ходе подготовки к практическим занятиям обучающимся рекомендуется изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. При этом следует учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Рекомендуется также дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной рабочей программой.

В связи с тем, что активность обучающегося на практических занятиях является предметом контроля его продвижения в освоении курса, то подготовка к таким занятиям требует ответственного отношения.

Прежде чем приступить к решению задач, обучающемуся необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы дисциплины по учебной литературе, рекомендованной программой курса; получить от преподавателя информацию о порядке проведения занятия, критериях оценки результатов работы; получить от преподавателя конкретное задание и информацию о сроках выполнения, о требованиях к оформлению и форме представления результатов.

При выполнении задания необходимо привести развернутые пояснения хода решения и проанализировать полученные результаты. При необходимости обучающиеся имеют возможность задать вопросы преподавателю по трудностям, возникшим при решении задач.

Самостоятельная работа обучающегося является основным средством овладения учебным материалом во время, свободное от обязательных учебных занятий. Самостоятельная работа обучающегося над усвоением учебного материала по учебной дисциплине может выполняться в библиотеке университета, учебных кабинетах, компьютерных классах, а также в домашних условиях. Содержание самостоятельной работы обучающегося определяется учебной программой дисциплины, методическими материалами, заданиями и указаниями преподавателя.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины. Самостоятельная работа является обязательной для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует

более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

Для обеспечения самостоятельной работы на кафедре Информационных технологий и математических методов в экономике разработаны методические указания к самостоятельной работе студентов.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Высшая математика для экономического бакалавриата в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 239 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05822-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537851
2	Высшая математика для экономического бакалавриата в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05823-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537852
3	Красс, М. С. Математика в экономике. Базовый курс : учебник для вузов / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 470 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18619-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/545165
4	Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для вузов / В. С. Шипачев. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 212 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04282-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/538769

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Наука, 2005. – 352 с.
6	Основы математического анализа : учебное пособие / В.В. Давнис О.С. Воищева, С.С. Щекунских и др; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 203 с. .-ISBN- 978-5-9273-2526-9.
7	Высшая математика для экономистов : учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н.Ш. Кремер. – 3-е изд. – Москва : Юнити, 2015. – 482 с. : граф. – (Золотой фонд российских учебников). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541 – ISBN 978-5-238-00991-9.
8	Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании:Учебник – М.: Изд. «Дело», 2001. – 688с.
9	Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу:Учебное пособие для вузов/Б.П Демидович - М.:Наука, 1977. – 524 с.
10	Красс М.С. Математика для экономистов/М.С. Красс, Б.П.Чупрынов. - Санкт-Петербург[и др.]: Питер, 2010. – 464 с. : ил., табл. – (Учебное пособие). – Библиогр.: с.461.-Предм.указ.: с.462-464.- М.: ИНФРА-М, 2008. – 463 с. ISBN 978-5-94723-672
11	Кундышева, Е.С. Математика : учебник / Е.С. Кундышева. – 4-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2015. – 562 с. : табл., граф., схем., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=452840 . – Библиогр.: с. 552-553. – ISBN 978-5-394-02261-6.
12	Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. том. 1, 2 :Учебник - М.: МГУ, 1985. – 660 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1.	Зональная научная библиотека ВГУ https://www.lib.vsu.ru/
2.	ЭБС Лань, http://e.lanbook.com/
3.	ЭБС Университетская библиотека online https://biblioclub.ru/
4.	Национальный цифровой ресурс «РУКОНТ» http://rucont.ru
5.	Портал «Электронный университет ВГУ» – Moodle: URL: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6247

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины. Самостоятельная работа является обязательной для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Для обеспечения самостоятельной работы на кафедре Информационных технологий и математических методов в экономике разработаны методические указания к самостоятельной работе студентов.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

Особенности учебно-методического обеспечения самостоятельной работы для лиц с ОВЗ:

Студенты с ограниченными возможностями здоровья имеют свои специфические особенности восприятия, переработки материала. Подбор и разработка учебных материалов для таких студентов производится с учетом того, чтобы предоставить этот материал в различных формах так, чтобы обучающийся с нарушениями слуха получил информацию визуально, с нарушениями зрения – аудиально.

Предусмотрено в случае необходимости создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей, альтернативную версию медиаконтентов, предусмотрена возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотрена доступность управления контентом с клавиатуры.

№ п/п	Источник
1	Методические указания для самостоятельной работы студентов по курсам "Математический анализ", "Многомерный математический анализ" [Электронный ресурс] : для студ. 1 к. экон. фак. по направлениям "Экономика" и "Экономическая безопасность" / Воронеж. гос. ун-т ;[сост.: В.В. Давнис и др.] .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж, 2015 .— Загл. с титул. экрана .—

	Свободный доступ из интрасети ВГУ . — Текстовый файл . — Windows 2000 ; Adobe Acrobat Reader .— <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-278.pdf >.
2	Основы математического анализа : учебное пособие /В.В. Давнис О.С. Воищева, С.С. Щекунских и др; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 203 с. .-ISBN- 978-5-9273-2526-9.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина реализуется с элементами электронного обучения и дистанционных технологий в рамках электронного курса: ((ЭК) размещенного на портале «Электронный университет ВГУ» <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6247> включает учебные материалы для самостоятельной работы обучающихся, а также обеспечивает возможность проведения контактных часов/аудиторных занятий в режиме онлайн.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель столы, стулья, доска, ноутбук, проектор, экран для проектора настенный, WHDMI-приемник, г. Воронеж, ул. Хользунова, 42в

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ВГУ: Специализированная мебель, компьютер с возможностью подключения к сети "Интернет"

19. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Компетенция	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Введение. Элементы теории множеств	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.4	Практические задания, Контрольная работа 1 Тест 1
2.	Последовательности, предел последовательности			
3.	Функции. Предел функции			
4.	Непрерывность функций			
5..	Дифференциальное исчисление функции одной переменной			
6.	Применение дифференциального исчисления к исследованию функций			
7.	Неопределенный интеграл			
8.	Определенный интеграл			
9.	Несобственные интегралы			
10.	Векторные пространства. Функции многих переменных			Практические задания, Контрольная работа 4

№ п/п	Наименование раз- деля дисциплины	Компетен- ция	Индикатор до- стижения ком- петенции	Оценочные средства
11.	Числовые и функцио- нальные ряды			
12.	Дифференциальные уравнения			
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Перечень вопросов к экзамену Практическое задание КИМ

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Пример практического задания
(текущая аттестация 1 семестр)

Контрольная работа 1

Найти пределы функций:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 3x^2 - 3x^3}{2x^3 + 4x^2 + 5x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}}{x-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{ctg} \pi x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{x}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{\sqrt{3n^4+n^3}}$$

Контрольная работа 2

1. Найти производную функции $y = 2^{\cos^3(4x)}$

2. Исследовать функцию и построить графики.

$$1) \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

$$2) \quad y = x + 2\sqrt{-x}.$$

Пример практического задания
(текущая аттестация 2 семестр)

Контрольная работа 3

Найти интегралы

$$1) \int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$2) \int x^2 e^{2x} dx$$

$$3) \int \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1} dx$$

$$4) \int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x}$$

$$5) \int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$$

$$6) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$$

Вычислить интегралы

$$1) \int_0^1 x\sqrt{4-x^2}dx$$

$$2) \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Контрольная работа 4

1. Найти дифференциал функции $u = x^y + 2^{xy} + \cos^2(x^3z)$.
2. Найти дифференциал второго порядка $u = x^3y^2 + \sin x + 5 \cos y$.
3. Найти дифференциал первого порядка функции $f(x, y, z) = z - xy + \frac{y}{zx}$ в точке $M(1, 0, 1)$.
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функции $z = \sqrt{2xy + x^2}$, где $x = 2^{u^2} + \cos v$, $y = \operatorname{ctgu} + 2^v$.
5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{tg}(xy^2z)^3$.
6. Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
7. Найти экстремум функции $z = x + y$ при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

Описание технологии проведения

Каждому обучающемуся выдается вариант контрольной работы, состоящей из пяти задач. Обучающиеся выполняют контрольную работу по вариантам по вариантам в течение 60 минут.

Критерии оценки

Критерием оценивания ответов на контрольную работу является оценка.

Шкала оценивания контрольной работы:

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если верно решены все предложенные задачи, возможно допущена одна вычислительная ошибка;
- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если верно решены четыре из пяти предложенных задач, или решены все задачи, но допущены ошибки в ходе решения;
- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если верно решены три из пяти предложенных задач, а решение остальных задач не приведено или они решены с грубыми ошибками;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если решено меньше трех задач или в целом все задачи решены неверно.

Тесты

Тест 1

Вариант 1

Теоретическая часть

1. Сформулировать определение сложной функции. Привести примеры сложной функции.
2. Приведите примеры эквивалентных бесконечно малых функций в точке $x = 2$.
3. Сформулировать определение предела функции по Гейне при $x \rightarrow -\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
4. Какие из перечисленных функций являются при $x \rightarrow 3$ бесконечно малыми:

$$1) y = \frac{1}{x-3}; \quad 2) y = (x-3)^{10}; \quad 3) y = \sin \frac{x}{3}; \quad 4) y = \cos(2(x-3)); \quad 5) y = \frac{1}{\cos(3x-1)}.$$

Ответ обосновать.

Задачи

1. Примером ограниченной последовательности является последовательность:

- 1) 0; 1; 0; 2; 0; 3... 2) -1; -2; -3; -4... 3) 2; -2; 2; -2... 4) 2; 4; 6; 8; 10...

Ответ обосновать.

2. При каком a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9}{x}\right)^{ax} = e^3$.

Ответ обосновать.

3. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$. Тогда четвертый член этой последовательности равен:

- 1) 108 2) 48 3) 54 4) 18.

Ответ обосновать.

4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{5x}$.

2 семестр

Тест 2

Вариант 1

Теоретическая часть

1. При каких a и b функция $F(x) = \frac{a}{3}x^b + \frac{a}{3}x^2 + x + 5$ является первообразной для $f(x) = (3x+1)^2$.

Ответ обосновать.

2. Указать замену переменной, которую необходимо выполнить в интеграле $\int x^5 e^{x^3} dx$ для его упрощения или сведения к табличному. Ответ обосновать.

- 1) $t = x^5$; 2) $t = x^3$; 3) $t = x^2 e^{x^3}$; 4) $t = e^{x^3}$.

3. Перечислить основные типы интегралов, берущихся по частям.

4. Замена переменной в определенном интеграле (теорема с доказательством).

5. Интеграл $\int_1^{+\infty} e^{ax} dx$ сходится

- 1) при всех $a > 0$; 2) при всех $a < 0$; 3) при всех a ; 4) ни при каких a .
Ответ обосновать.

Задачи

6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{x^2 - x + 1}{1 + x^2} dx$.

7. Найти интеграл $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$.

8. Найти интеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Пример тестовых заданий для проверки сформированности компетенции

1) тестовые задания (закрытого типа среднего уровня сложности):

ЗАДАНИЕ 1. Выберите правильный вариант ответа:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ равен:

= 4

~ -4

~ 2

~ -2

ЗАДАНИЕ 2. Выберите правильный вариант ответа:

Прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика функции....

= $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$

$\sim f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2-1}$

$\sim f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$\sim f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

ЗАДАНИЕ 3. Выберите правильный вариант ответа:

Значение производной функции $f(x) = \sin 6x$ в точке $x=0$ равно....

=6

~0

~-1

~1

ЗАДАНИЕ 4. Выберите правильный вариант ответа:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$ равен:

= 1/3

~3

~1

~0

ЗАДАНИЕ 5. Выберите правильный вариант ответа:

Прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика функции:

= $f(x) = \frac{3x^3}{x-2}$

$\sim f(x) = \frac{-3x^3}{x+2}$

$\sim f(x) = \frac{x-2}{3x^3}$

$\sim f(x) = \frac{x+2}{3x^3}$

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

ЗАДАНИЕ 1. Дать правильный ответ.

Точка $x=a$ является точкой максимума функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x$ при a равном...

Ответ: -3

ЗАДАНИЕ 2. Дать правильный ответ.

Интеграл $\int_0^1 (x^3 - 3x^2) dx$ равен:

Ответ укажите в виде десятичной дроби

Ответ: -0,75

ЗАДАНИЕ 3. Дать правильный ответ.

Если функция двух переменных $z = x^3 + 3x^2y - y^3$, то частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(x_0; y_0) = (1; 2)$ равна

Ответ: 15

ЗАДАНИЕ 4. Дать правильный ответ.

Точка $x=a$ является точкой перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ при a равном...

Ответ: 1

ЗАДАНИЕ 5. Дать правильный ответ.

Интеграл $\int_2^4 \frac{dx}{x^2}$ равен:

Ответ укажите в виде десятичной дроби

Ответ: 0,25

Описание технологии проведения

Тестовые задания Обучающиеся выполняют выданные тестовые задания по вариантам в течение 45 минут.

Критерии оценки

Критерием оценивания тестов является оценка. Общая сумма баллов, которая может быть получена за аттестационный тест, соответствует количеству тестовых заданий.

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ, в том числе частично.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ, в том числе частично.

Шкала оценивания тестовых заданий:

-оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы на 86-100% тестовых заданий;

-оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы на 70-85% тестовых заданий;

-оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы на 54-69% тестовых заданий;

-оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы менее чем на 54% тестовых заданий.

20.2. Промежуточная аттестация

Перечень вопросов к зачету с оценкой и экзамену:

1 семестр

1. Множества. Операции над множествами.
2. Ограниченность множества. Точная верхняя и нижняя грани множества. Свойство точных граней.
3. Теорема о существовании точных граней.
4. Открытые, замкнутые множества. Компактность множества. Отображение.
5. Последовательности. Действия над ними.
6. Ограниченные и неограниченные последовательности.
7. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности. Связь между ними.
8. Свойства бесконечно малых последовательностей.
9. Сходящиеся последовательности.
10. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

11. Алгебраическая сумма, произведение, частное сходящихся последовательностей.
12. Пределочный переход в неравенствах.
13. Теорема о трех последовательностях.
14. Монотонные последовательности.
15. Число e .
16. Теорема о вложенных промежутках.
17. Понятие функции. Способы задания.
18. Предел функции в точке. Правый, левый пределы функции (по Гейне и по Коши).
19. Предел функции на бесконечности (по Гейне и по Коши).
20. Теоремы о пределах функции.
21. Первый замечательный предел.
22. Второй замечательный предел.
23. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между ними.
24. Сравнение бесконечно малых функций.
25. Непрерывность функции.
26. Точки разрыва функции (первого рода, второго рода, устранимый разрыв).
27. Теорема об арифметических свойствах непрерывных функций.
28. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.
29. Первая теорема Больцано-Коши.
30. Вторая теорема Больцано-Коши.
31. Точная верхняя и точная нижняя грани функции.
32. Первая теорема Вейерштрасса.
33. Вторая теорема Вейерштрасса.
34. Непрерывность сложной функции.
35. Непрерывность обратной функции.
36. Понятие производной. Геометрический смысл.
37. Понятие дифференцируемости функции.
38. Теорема о связи дифференцируемости функции и существованием производной.
39. Связь непрерывности и дифференцируемости.
40. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
41. Бесконечно малые, бесконечно большие функции. Связь между ними.
42. Свойства бесконечно малых функций.
43. Правила сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций.
44. Дифференцирование суммы, разности, произведения и частного двух функций.
45. Производные функций

$$y = x^n, \quad n \in N, \quad y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

46. Теорема о производной обратной функции.

$$47. \text{Производные функций } y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

48. Дифференцирование сложной функции.

$$49. \text{Прием логарифмического дифференцирования. Производная функции } y = x^\alpha, \quad \alpha \in R.$$

50. Производные высших порядков.

51. Дифференциалы высших порядков.

52. Возрастание и убывание функции в точке.

53. Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие.

54. Теорема Ролля.

55. Теорема Лагранжа.

56. Теорема Коши.

57. Условия монотонности функции на интервале.

58. Формула Тейлора.

59. Первое достаточное условие экстремума.

60. Второе достаточное условие экстремума.

61. Экстремум функции не дифференцируемой в данной точке.

62. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.

63. Необходимое условие точки перегиба.

64. Достаточное условие точки перегиба.

65. Асимптоты графика функции.

2 семестр

1. Понятие первообразной. Основные свойства (лемма, теорема).
2. Понятие неопределенного интеграла.
3. Метод замены переменной.
4. Метод интегрирования по частям.
5. Основные типы интегралов берающихся по частям.
6. Теорема о представлении рациональной функции в виде суммы элементарных дробей с неопределенными коэффициентами.
7. Метод неопределенных коэффициентов.
8. Основные типы интегралов от рациональных функций.
9. Интегрирование тригонометрических функций.
10. Интегрирование некоторых иррациональных функций.
11. Понятие интегральной суммы. Геометрический смысл.
12. Понятие определенного интеграла.
13. Основные свойства определенного интеграла.
14. Интеграл с переменным верхним пределом.
15. Формула Ньютона-Лейбница.
16. Замена переменных в определенном интеграле.
17. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
18. Приближенное вычисление определенного интеграла.
19. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
20. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
21. Метрические, линейные, нормированные, евклидовы пространства.
22. Понятие функции n переменных. Предел функции n переменных.
23. Непрерывность функции n переменных.
24. Непрерывность функции n переменных по одной из переменных.
25. Непрерывность сложной функции.
26. Частные производные функции n переменных.
27. Дифференцируемость функции n переменных.
28. Дифференциал функции n переменных.
29. Дифференцирование сложной функции.
30. Производная по направлению. Градиент.
31. Частные производные высших порядков функции n переменных.
32. Дифференциал второго порядка функции n переменных.
33. Квадратичная форма. Критерий Сильвестра.
34. Локальный экстремум функции n переменных. Необходимое условие локального экстремума.
35. Достаточные условия локального экстремума функции n переменных.
36. Неявные функции. Производная неявной функции.
37. Условный экстремум.
38. Метод множителей Лагранжа.
39. Определение числового ряда, частичной суммы, сходящегося ряда.
40. Свойства сходящихся числовых рядов.
41. Необходимое условие сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
42. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами.
43. Признак сравнения.
44. Признак Доломбера.
45. Интегральный признак Коши. Пример.
46. Знакочередующийся ряд. Признак Лейбница.
47. Знакопеременные ряды, их сходимость. Абсолютная и условная сходимость.
48. Степенные ряды.
49. Теорема Абеля.
50. Теорема об интервале сходимости степенного ряда.
51. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда.

52. Определение дифференциального уравнения первого порядка. Решение уравнения. Задача Коши. Общее и частное решение уравнения.
 53. Уравнения с разделяющимися переменными.
 54. Линейные уравнения.
 55. Уравнения в полных дифференциалах.
 56. Дифференциальные уравнения второго порядка (основные понятия, уравнения допускающие понижения порядка).
 57. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами).

Перечень практических заданий:

- 1) Определите следующие множества:
 - пересечение четных и нечетных чисел;
 - пересечение множеств целых и четных чисел;
 - объединение множеств четных и нечетных чисел;
 - разность множеств целых и четных чисел.
- 2) Даны три множества: $A = [-2; 8]$; $B = (-4; 11)$; $C = [0; 9]$.
 Найдите следующие множества: $A \cap B \cap C$; $(A \cup B) \cap C'$; $A \cup B \cup C$; $(A' \cap B) \cup C$.
- 3) Проверить графически справедливость равенства:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$
- 4) Проверить графически справедливость следующих равенств:
 1. $A \cup B = B \cup A$;
 2. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
 3. $A \cap B = B \cap A$;
 4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
 6. $((A \cap D) \cup (B \cup D'))' = (A' \cap D) \cup (B' \cup D)$;
 7. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cup (A \cap B)$;
 8. $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$;
 9. $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap D) \setminus B)$.

Свойства пределов. Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

Найти пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x - \cos 2x)$.
6. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{2}x^3 - x + 2 \right)$.
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3 + \sqrt[4]{2x^3}}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Найти пределы:

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} . \\
 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1} . \\
 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right) . \\
 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 3x + 4} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3} . \\
 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 1}} . \\
 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} . \\
 8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{2x^2 + 3x + 4} .
 \end{aligned}$$

Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$

Найти пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} .$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x} .$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} .$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} .$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} .$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} .$$

Неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) .$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) .$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}) .$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \right) .$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1}) .$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 9}) .$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} .$$

Второй замечательный предел

Найти пределы:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n} \right)^n .$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^n .$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{(1-x)/x}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+4}.$$

11. Используя определение предела функции доказать, что:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7;$$

12. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$. Найти такое δ , чтобы для $|x - 2| < \delta$ выполнялось $|f(x) - 3| = |(2x - 1) - 3| < 0,01$.

13. Сформулировать на “языке $\varepsilon - \delta$ ” и на “языке последовательностей” определения:

1) бесконечно большой функции; 2) бесконечно малой функции:

а) при $x \rightarrow +\infty$; б) при $x \rightarrow -\infty$; в) при $x \rightarrow \infty$; г) при $x \rightarrow a^+$; д) $x \rightarrow a^-$.

14. Сравнить бесконечно малые в точке $x = 0$ функции:

$$1) \alpha(x) = \sin x \text{ и } \beta(x) = x;$$

$$2) \alpha(x) = \sin x \text{ и } \beta(x) = \sin x;$$

$$3) \alpha(x) = 1 - \cos x \text{ и } \beta(x) = x.$$

15. Используя сравнение бесконечно малых функций найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3}$.

16. Сравнить бесконечно большие функции:

$$1) \alpha(x) = \frac{1+x}{x} \text{ и } \beta(x) = \frac{1}{x} \text{ в точке } x = 0;$$

$$2) \alpha(x) = x^2 + x \text{ и } \beta(x) = 3x - 2 \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$3) \alpha(x) = 3x^2 + 1 \text{ и } \beta(x) = x^2 - 5 \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

Понятие производной

1. Найти $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если:

$$a) y = ax^2 + bx; \quad b) y = ax^2; \quad v) y = x + \frac{1}{x}.$$

2. Используя определение производной, найдите производные функций в точке $x = x_0$:

$$1. f(x) = 3x + 2; \quad 2. f(x) = 5x^2;$$

$$3. f(x) = -3x^2 - 5x; \quad 4. f(x) = 2x^3;$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 6. f(x) = \frac{2}{x};$$

Вычисление производных

Найти по формулам производные от функций.

1. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5.$

2. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1.$

3. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}.$

4. $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2.$

5. $y = 4x^5 - 3\sin x + 5\operatorname{ctg} x.$

6. $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2\operatorname{tg} x + 3.$

7. $y = 3 + 4x^2 + \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x.$

8. $y = x^2 \cos x.$

9. $y = x^2 \operatorname{ctg} x.$

10. $y = \frac{\cos x}{x^2}.$

11. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$

12. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x;$ вычислить $f'(0), f'(1), f'(-1).$

13. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2};$ вычислить $f'(2) - f'(-2).$

Производная сложной функции

Найти производные от функций:

1. $y = \frac{1}{(1-x^2)^5}.$

2. $y = \sqrt{\cos 4x}.$

3. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}.$

4. $y = (\sin x)^4.$

5. $y = \sqrt{\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}.$

6. $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

7. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + \operatorname{tg} 2x.$

8. $y = \operatorname{tg} \sin \cos x.$

Производные логарифмических и показательных функций

Найти производные от функций:

1. $y = \ln(x^2 + 2x).$

2. $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x.$

3. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).$

4. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}.$

5. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x}).$

6. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

7. $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}).$

8. $y = \ln \sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x} + 1}}.$

Производные обратных тригонометрических функций

Найти производные от функций:

1. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

2. $y = x - \arctg x.$

3. $y = \arcsin \sqrt{1-4x}.$

4. $y = \arccos(1-2x).$

5. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1+x}{1-x}.$

6. $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

7. $y = \arcsin(e^{3x}).$

8. $y = \arctg x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

9. $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x).$ 10. $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x};$ найти $f'(5).$

11. $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \arctg x.$

12. $y = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} x.$

Производные высших порядков

1. Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = \sin^2 x;$ 2) $y = \operatorname{tg} x;$ 3) $y = \sqrt{1+x^2};$

4) $y = e^{-x^2};$ 5) $y = \operatorname{ctg} x;$ 6) $y = \arcsin \frac{x}{2};$

2. Найти производные третьего порядка от функций:

1) $y = \cos^2 x;$ 2) $y = \frac{1}{x^2};$ 3) $y = x^2 \cdot \sin x;$

4) $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2};$ 5) $y = x \cdot e^{-x};$ 6) $y = e^x \cdot \cos x;$

3. Найти производные n -го порядка от функций:

1) $y = e^{-\frac{x}{a}};$ 2) $y = \ln x;$ 3) $y = \sqrt{x};$

4) $y = x^n;$ 5) $y = \sin x;$ 6) $y = \cos^2 x;$

7) $y = 2^{3x};$ 8) $y = \frac{1}{1+2x};$ 9) $y = \sin^2 x;$

Дифференциал функции

Найти дифференциалы функций:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x;$

2. $y = \sqrt{1+x^2};$

3. $y = \sin^3 2x;$

4. $y = \ln(\sin \sqrt{x});$

5. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}};$

6. $y = 2^{-x^2};$

7. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1};$

8. $y = x^2 \cdot \sin \sqrt{x};$

Исследовать функции и построить графики функций:

$$1. \ y = \frac{x^3}{3} + x^2;$$

$$2. \ y = x^3 + 6x^2 + 9x;$$

$$3. \ y = \frac{x^2}{x^2 - 1};$$

$$4. \ y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x};$$

$$5. \ y = \frac{2x^3}{x^2 - 4};$$

$$6. \ y = (x+1)(x-2)^2;$$

$$7. \ y = \frac{x^4}{(1+x)^3};$$

$$8. \ y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2};$$

Найти интегралы:

$$1. \ \int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$2. \ \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right) dx.$$

$$3. \ \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$4. \ \int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx.$$

$$5. \ \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$6. \ \int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$7. \ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$$

$$8. \ \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

$$9. \ \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

$$10. \ \int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

$$11. \ \int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$12. \ \int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$13. \ \int \left(\frac{1}{x^2 - 25} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} \right) dx.$$

$$14. \ \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx.$$

$$15. \ \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$$

$$16. \ \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$17. \ \int (2^x + e^x) dx.$$

$$18. \ \int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx.$$

$$19. \ \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$20. \ \int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{x^3} \right) dx.$$

$$21. \ \int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3} dx.$$

$$22. \ \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$23. \ \int \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

$$24. \ \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx.$$

Вычислить определенные интегралы:

$$1. \int_0^2 (3x^2 - 1)dx.$$

$$2. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx.$$

$$3. \int_0^1 \sqrt{1-x}dx.$$

$$4. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(8+3x)^3}.$$

$$5. \int_3^5 x\sqrt{x^2 - 9}dx.$$

$$6. \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)dx.$$

$$7. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$$

$$8. \int_0^{2\pi} \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$9. \int_1^e \frac{dx}{x(1 - \ln^2 x)}.$$

$$10. \int_1^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$$

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^5}.$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} dx.$$

$$6. \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$7. \int_{-\infty}^0 xe^x dx.$$

$$8. \int_0^{+\infty} x \sin x dx.$$

$$9. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

$$10. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}.$$

Найти частные производные от функций:

$$1. z = x^3 + 3x^2y - y^3.$$

$$2. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$3. z = \frac{y}{x}.$$

$$4. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$5. z = \frac{xy}{x-y}.$$

$$6. z = \ln \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \right).$$

$$7. z = \sin(x+y).$$

$$8. z = x^2y.$$

Найти полные дифференциалы функций:

$$1. z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

$$2. s = x \cdot \ln t.$$

$$3. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$4. z = x^2 y.$$

$$5. z = xy.$$

$$6. z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Примеры КИМ

Контрольно-измерительный материал №3 (1 семестр)

1. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Связь между ними.
2. Понятие дифференциала функции, геометрический смысл.

Задачи:

$$1. \text{Вычислить предел: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$2. \text{Вычислить предел: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

$$3. \text{Вычислить производную: } y = \sqrt[3]{x^5} - \ln 3 \cdot (x^5 + \frac{6}{x})$$

$$4. \text{Вычислить производную: } y = \frac{2}{2x^4 - x + 6} - \ln \frac{1}{x}$$

$$5. \text{Найти точки перегиба и интервалы выпуклости графика функции } y = x \cdot e^{-x^2/2}.$$

Контрольно-измерительный материал №4 (1 семестр)

1. Понятие непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями.
2. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.

Задачи:

$$1. \text{Вычислить предел: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x}{5x^2}$$

$$2. \text{Вычислить предел: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 3x - 1}$$

$$3. \text{Вычислить производную: } y = \sqrt[3]{x-5} + \sqrt{2} \cos(x+1)$$

$$4. \text{Вычислить производную: } y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$$

$$5. \text{Найти асимптоты графика функции } y = \frac{3+x^2}{1-x}.$$

Контрольно-измерительный материал №3 (2 семестр)

1. Первообразная функция.
2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Геометрический смысл. Примеры.

Задачи:

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx.$
2. Вычислить интеграл: $\int x e^{2x} dx.$
3. Вычислить интеграл: $\int_1^{e^4} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}.$
4. Вычислить интеграл: $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx.$
5. Найти экстремум функции: $u = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3.$
6. Найти экстремум функции: $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11.$

Контрольно-измерительный материал №4 (2 семестр)

1. Неопределенный интеграл. Основные свойства.
2. Частные производные функции нескольких переменных.

Задачи:

1. Вычислить интеграл: $\int \operatorname{tg} x dx.$
2. Вычислить интеграл: $\int x^2 e^{\frac{-x}{2}} dx.$
3. Вычислить интеграл: $\int_3^5 x \sqrt{x^2 - 9} dx.$
4. Вычислить интеграл: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1} dx.$
5. Найти экстремум функции: $u = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y.$
6. Найти экстремум функции: $z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1.$

Требования к ответу на экзамене, описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой и экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основных понятий и методов математического анализа, владение понятийным аппаратом математического анализа;
- 2) умение формулировать и доказывать основные теоремы математического анализа; умение иллюстрировать ответ примерами и фактами;
- 3) умение решать типовые задачи математического анализа; умение вычислять пределы, находить производные и интегралы, проводить исследование функций, находить экстремум функции нескольких переменных;

- 4) умение применять теоретические знания и методы математического анализа к решению практических задач;
 5) умение использовать математический аппарат при решении теоретических и прикладных задач;
 6) умение анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты;
 7) владение навыками применения математического инструментария для решения экономических задач.

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой и экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<p><i>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом математического анализа, умеет формулировать и доказывать основные теоремы математического анализа; способен иллюстрировать ответ примерами и фактами; умеет решать типовые задачи математического анализа; умеет вычислять пределы, находить производные и интегралы, проводить исследование функций, находить экстремум функции нескольких переменных; умеет применять теоретические знания для решения практических задач; умеет использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; умеет применять методы математического анализа к решению практических задач.</i></p> <p><i>Или</i></p> <p><i>Посещено более 95 процентов лекционных и практических занятий, выполнено более 95 процентов заданий по лекционным и практическим занятиям, продемонстрирована систематическая активная работа на практических занятиях, контрольные работы выполнены на оценку «отлично».</i></p>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<p><i>Обучающийся владеет понятийным аппаратом математического анализа, умеет формулировать основные теоремы математического анализа, но при доказательстве допускает незначительные ошибки, способен иллюстрировать ответ примерами и фактами; умеет вычислять пределы, находить производные и интегралы, проводить исследование функций, находить экстремум функции нескольких переменных, но при решении типовых задач математического анализа допускает незначительные вычислительные ошибки; способен применять теоретические знания для решения практических задач, умеет использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; умеет применять методы математического анализа к решению практических задач.</i></p> <p><i>Или</i></p> <p><i>Посещено от 80 до 95 процентов лекционных и практических занятий, выполнено от 80 до 95 процентов заданий по лекционным и практическим занятиям, продемонстрирована систематическая активная работа на практических занятиях, контрольные работы выполнены на оценку «хорошо» и выше.</i></p>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<p><i>Обучающийся частично владеет теоретическими основами математического анализа, формулирует основные теоремы математического анализа, но не умеет их доказывать; обучающийся дает неполные ответы; фрагментарно способен применять теоретические знания для решения практических задач; допускает ошибки при решении типовых задач математического анализа; фрагментарно умеет вычислять пределы, находить производные и интегралы, проводить исследование функций, находить экстремум функции нескольких переменных; умеет фрагментарно</i></p>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>

<p>использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; умеет фрагментарно применять методы математического анализа к решению практических задач.</p> <p>Или</p> <p>Посещено от 65 до 80 процентов лекционных и практических занятий, выполнено от 65 до 80 процентов заданий по лекционным и практическим занятиям, контрольные работы выполнены на оценку «удовлетворительно» и выше.</p>		
<p>Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания теоретических основ математического анализа, допускает грубые ошибки при решении типовых задач математического анализа, при вычислении пределов, нахождении производных и интегралов, при проведении исследования функций, при нахождении экстремума функции нескольких переменных, допускает грубые ошибки при применении теоретических знаний для решения практических задач, не умеет использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; не умеет применять методы математического анализа к решению практических задач.</p>	-	Неудовлетворительно

Промежуточная аттестация с применением ДОТ

1. Промежуточная аттестация с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) проводится в рамках электронного курса, размещенного в ЭИОС (образовательный портал «Электронный университет ВГУ» (LMS Moodle, <https://edu.vsu.ru/>)).
2. Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме экзамена.
3. Обучающиеся, проходящие промежуточную аттестацию с применением ДОТ, должны располагать техническими средствами и программным обеспечением, позволяющим обеспечить процедуры аттестации. Обучающийся самостоятельно обеспечивает выполнение необходимых технических требований для проведения промежуточной аттестации с применением дистанционных образовательных технологий.
4. Идентификация личности обучающегося при прохождении промежуточной аттестации обеспечивается посредством использования каждым обучающимся индивидуального логина и пароля при входе в личный кабинет, размещенный в ЭИОС ВГУ.